18. Demostrar que si $y = f(x)$ admite derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, y $f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, se verifica $f'(x_0) = 0$.

Como $f(x)$ presenta un máximo relativo en $x = x_0$, para todo Δx, siendo $|\Delta x|$ suficientemente pequeño,

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \qquad \text{y} \qquad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$$

Ahora bien cuando $\Delta x < 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$

y cuando $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0.$

Por tanto, $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, y $f'(x_0) = 0$, como se quería demostrar. Ver Problema 34 para el mínimo relativo.

19. Demostrar el criterio de la segunda derivada para hallar máximos y mínimos: Si $f(x)$ y $f'(x)$ admiten derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, representa un valor crítico de $f(x)$, y $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.

Como $f''(x_0) > 0$, $f'(x)$ es creciente en $x = x_0$ y existirá un $h > 0$ tal, que $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$. Por tanto, para valores de x inferiores a x_0, $f'(x) < f'(x_0)$, y para valores de x superiores a x_0, $f'(x) > f'(x_0)$. Ahora bien, como $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < x_0$, y $f'(x) > 0$ para $x > x_0$. Estas son las condiciones (ver Problema 18) que aseguran la existencia de un mínimo relativo de la función $f(x)$ en el punto $x = x_0$. Se deja para el alumno, la demostración del teorema análogo para el máximo relativo.

20. Consideremos el problema de situar sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ un punto (X, Y) cuya distancia a uno dado $P(a, 0)$, siendo $a > 0$, sea mínima. De la expresión que da la distancia entre dos puntos, se deduce $D^2 = (X - a)^2 + Y^2$, y por pertenecer el punto (X, Y) a la hipérbola, $X^2 - Y^2 = 1$.

Expresando D^2 en función X solamente, resulta:

$$f(X) = (X - a)^2 + X^2 - 1 = 2X^2 - 2aX + a^2 - 1$$

cuyo valor crítico de esta función es $X = \frac{1}{2}a$.

Si tomamos $a = \frac{1}{2}$, no habrá ningún punto sobre la hipérbola, porque Y se hace imaginario para el valor crítico $X = \frac{1}{4}$. Dibujando la figura correspondiente se vería claramente que el punto de la hipérbola más próximo al $P(\frac{1}{2}, 0)$ es el $V(1, 0)$. Por tanto, lo que se trata en este caso es hallar el mínimo de la función $f(X) = (X - \frac{1}{2})^2 + X^2 - 1$ con la condición de que $X \geq 1$. (Obsérvese que esta condición no la lleva implícitamente la función $f(X)$. Esta función, sin poner condición alguna, presenta un mínimo relativo en el punto $X = \frac{1}{4}$.) En el intervalo $X \geq 1$, $f(X)$ tiene un mínimo absoluto en el extremo $X = 1$, que no es un mínimo relativo. Se deja como ejercicio para el alumno el estudio del problema cuando (i) $a = \sqrt{2}$ y (ii) $a = 3$.

Problemas propuestos

21. Determinar los intervalos en los que son crecientes y decrecientes cada una de las funciones del Problema 1.

Sol. (*a*) Crec. $x < 0$; Dec. $x > 0$. (*b*) Crec. $x > 3$, Dec. $x < 3$. (*c*) Crec. $-5/2 < x < 0$; Dec. $0 < x < 5/2$. (*d*) Crec. $x > 4$.

22. (*a*) Demostrar que $y = x^5 + 20x - 6$ es una función creciente para todos los valores de x.
(*b*) Demostrar que $y = 1 - x^3 - x^7$ es una función decreciente para todos los valores de x.

23. Hallar los máximos y mínimos, aplicando el criterio de la primera derivada, de las funciones siguientes:

(*a*) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ — *Sol.* $x = -1$ mínimo relativo $= -4$
(*b*) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= 4$
(*c*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ — *Sol.* $x = \frac{2}{3}$ mínimo relativo $= -256/27$; $x = -2$ máximo relativo $= 0$
(*d*) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= -4$; $x = 3$ máximo relativo $= -8$
(*e*) $f(x) = (2 - x)^3$ — *Sol.* No tiene ni máx. ni mín. relativos
(*f*) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ — *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 16$; $x = \pm 2$ mínimo relativo $= 0$

(*g*) $f(x) = (x - 4)^4 (x + 3)^3$ *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 6\,912$
$x = 4$ mínimo relativo $= 0$
$x = -3$ ni máximo ni mínimo

(*h*) $f(x) = x^3 + 48/x$ *Sol.* $x = -2$ máximo relativo $= -32$
$x = 2$ mínimo relativo $= 32$

(*i*) $f(x) = (x - 1)^{1/3} (x + 2)^{2/3}$ *Sol.* $x = -2$ máximo relativo $= 0$
$x = 0$ mínimo relativo $= -\sqrt[3]{4}$
$x = 1$ ni máximo ni mínimo

24. Hallar los máximos y mínimos de las funciones del Problema 23 (*a*)-(*f*) aplicando el criterio de la segunda derivada. Determinar, asimismo, los puntos de inflexión y los intervalos en los que la curva es cóncava o convexa.

Sol. (*a*) No tiene P.I.; es siempre cóncava.
(*b*) No tiene P.I.; es siempre convexa.
(*c*) P.I. en $x = -2/3$; cóncava para $x > -2/3$; convexa para $x < -2/3$.
(*d*) P.I. en $x = 2$; cóncava para $x > 2$; convexa para $x < 2$.
(*e*) P.I. en $x = 2$; convexa para $x > 2$; cóncava para $x < 2$.
(*f*) P.I en $x = \pm 2\sqrt{3}/3$; cóncava para $x > 2\sqrt{3}/3$ y $x < -2\sqrt{3}/3$; convexa en $-2\sqrt{3}/3 < x < 2\sqrt{3}/3$.

25. Demostrar que la función $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, carece de máximos y mínimos relativos.

26. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3px + q$.
Sol. Mín. $= q - 2p^{3/2}$, Máx. $= q + 2p^{3/2}$ si $p > 0$; en los demás casos, ni máximo ni mínimo.

27. Demostrar que $y = (a_1 - x)^2 + (a^2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2$ tiene un mínimo relativo cuando $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$.

28. Demostrar que si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$ hay un punto de inflexión en el punto $x = x_0$.

29. Demostrar que si $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene dos puntos críticos, en el punto medio del segmento que une los correspondientes valores críticos la función presenta un punto de inflexión, y que si solo tiene un punto crítico, éste es de inflexión.

30. Una función tiene un máximo (mínimo) absoluto en un punto $x = x_0$, cuando $f(x_0)$ es mayor (menor) o igual a cualquier otro valor de la función en su dominio de definición. Comprobar, gráficamente que (*a*) $y = -x^2$ tiene un máximo absoluto en el punto $x = 0$; (*b*) $y = (x - 3)^2$ tiene un mínimo absoluto ($= 0$) en el punto $x = 3$; (*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ tiene un máximo absoluto ($= 5$) en $x = 0$ y un mínimo absoluto ($= 0$) en $x = \pm 5/2$; (*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ tiene un mínimo absoluto ($= 0$) en $x = 4$.

31. Hallar los máximos y mínimos de las funciones siguientes en los intervalos dados:

(*a*) $y = -x^2$ en $-2 < x < 2$ *Sol.* Máx. ($= 0$) en $x = 0$
(*b*) $y = (x - 3)^2$ en $0 \leq x \leq 4$ *Sol.* Máx. ($= 9$) en $x = 0$
Mín. ($= 0$) en $x = 3$
(*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ en $-2 \leq x \leq 2$ *Sol.* Máx. ($= 5$) en $x = 0$
Mín. ($= 3$) en $x = \pm 2$
(*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ en $4 \leq x \leq 29$ *Sol.* Máx. ($= 5$) en $x = 29$
Mín. ($= 0$) en $x = 4$

Nota. Estos son los valores máximos y mínimos de los que se habla en la Propiedad II, Capítulo 3, de las funciones continuas.

32. Demostrar que una función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un punto $x = x_0$, si el ángulo de inclinación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ es agudo (obtuso).

33. Enunciar y demostrar el teorema análogo al del Problema 17 para una función decreciente.

34. Enunciar y demostrar el teorema análogo al del Problema 18 para el mínimo relativo.

35. Hallar los máximos y mínimos de la función $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$.
Sol. Máx. en (5,3); mín en (—1, —3).

36. La fuerza ejercida por el campo magnético creado por la corriente eléctrica que circula por una bobina de radio r sobre un pequeño imán situado a una distancia x del centro de dicha bobina viene dado por $F = \dfrac{kx}{(x^2 + r^2)^{5/2}}$. Demostrar que F es máximo en $x = \frac{1}{2}r$.

37. El trabajo realizado por una pila de fuerza electromotriz constante E y resistencia interna r conectada a una resistencia de carga R, es proporcional a $E^2R/(r + R)^2$. Demostrar que dicho trabajo es máximo para $R = r$.